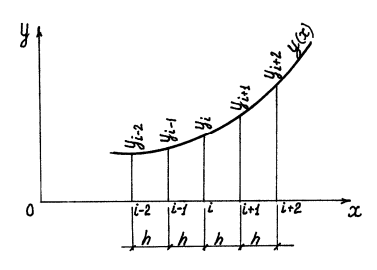
**1. Применение метода конечных разностей при решении задачи устойчивости сжатого стержня**

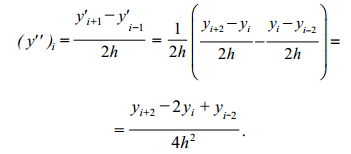
Среди приближенных методов расчета сжатых стержней на устойчивость можно выделить две группы. Это методы, основанные на применении энергетического критерия устойчивости, и методы, основанные на численном решении дифференциального уравнения равновесия. К первой группе относятся методы Ритца−Тимошенко и Бубнова−Галеркина, ко второй – метод конечных разностей.

В методе конечных разностей непрерывная функция прогибов задается в виде набора значений в ряде точек. Расстояния h между точками принимают одинаковыми и называют шагом разбиения.



Первую производную в точке i запишем так:

Тогда вторая производная в этой же точке:



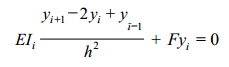
Уменьшая интервал в два раза, получаем



Выражения в числителях формул первой и второй производных называют конечными разностями, откуда и происходит название метода.

С учетом этих формул дифференциальное уравнение, например:

для некоторой точки i запишется так:



или



Составляя последнее уравнение для всех промежуточных точек (i = 2,3…, n−1), получаем n − 2 линейных однородных алгебраических уравнений относительно n величин . Присоединяя к ним граничные условия, приходим к полной системе n уравнений. Значение критической силы получаем из условия равенства нулю определителя этой системы. Оно соответствует наименьшему ненулевому решению.

Точность решения повышается с уменьшением шага h. Метод конечных разностей пригоден для расчета стержней с переменной и кусочно-постоянной жесткостью, с переменной продольной силой.

**2. Применение метода конечных разностей при определении прогиба нерастяжимой мембраны под действием распределенной нагрузки на ее поверхности и распределенных растягивающих усилий по периметру**

**3. Применение метода конечных разностей при решении одномерной задачи теплопроводности стены и заданных начальных и краевых условиях.**

Метод конечных разностей основан на допущении возможности замены непрерывного процесса изменения температуры скачкообразным как в пространстве, так и во времени. При этом дифференциальные уравнения теплопроводности заменяются уравнениями в конечных разностях.

Рассмотрим случай передачи теплоты через плоскую стенку неограниченно протяженную, он описывается дифференциальным уравнением:

 (1)

В конечных разностях это уравнение примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (2) |

где  - конечные приращения температуры,

 - конечные приращения времени,

 - толщины элементарных слоев в направлении оси ,

 - коэффициент температуропроводности.

Для решения этого уравнения разделим плоскую однородную стенку на элементарные слои одинаковой толщины :





n-1, z

n, z+1

n+1, z

n, z

n-1

n

n+1

Плоскости, разделяющие слои, обозначим номерами …n-1, n, n+1… По временной координате разобьем на равные интервалы . Температуры будем определять в плоскостях, разделяющие слои, и обозначим их , для удобства введем для температур два индекса: первый будет обозначать номер плоскости, а второй – момент времени. Тогда уравнение (2) примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3) |

где  - температура в плоскости  в момент времени .

Решая это уравнение относительно , получим:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (4) |

Полученная формула (4) общая для определения температуры в любой плоскости через интервал времени  по температурам в этой же плоскости и в двух соседних плоскостях в предыдущий момент времени . Таким образом, расчет изменения температуры во времени сводится к последовательному вычислению температур во всех плоскостях стенки через равные интервалы времени .

В частном случае, если подобрать значения  и  таким образом, чтобы , то формула (8) примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5) |

Формула (5) справедлива только при следующем соотношении:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (6) |

Физический смысл формулы состоит в том, что через данный интервал времени  между плоскостями  и  устанавливается стационарное состояние теплопередачи. Следовательно, этот интервал времени является максимальным и нельзя принимать интервалы  превышающие величину . Если величина  даже незначительно будет превышена, то изменения температуры будет носить беспорядочный скачкообразный характер и расчет температуры становится неверным. При уменьшении интервала по времени  расчет будет более точным. Наибольшую точность расчет будет иметь при соотношении .

Для определения температур на поверхности стены, граничащей с воздухом, примем следующие обозначения:

 - температура воздуха,

 - температура поверхности,

 - температура в плоскости, отстающей на от поверхности,

 - коэффициент теплоотдачи поверхности

 - коэффициент теплопроводности материала стены.

При выполнении соотношения (6) исходя из того, что через интервал времени  состояние теплопередачи становится стационарным, тогда из условия теплового баланса определим температуру на поверхности .

Количество теплоты, притекающего к поверхности от воздуха 

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

и количество теплоты 

|  |  |
| --- | --- |
| , | (8) |

отходящего от поверхности внутрь материала за интервал времени  должны быть в сумме равны нулю. Из уравнений (7) и (8) следует:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (9) |

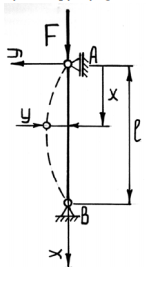
Решая полученное уравнение относительно , получим:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (10) |

**4. Применение метода Эйлера при определении прогиба консоли под действием распределенной нагрузки и сосредоточенной силы**

Рассмотрим шарнирно опертый по концам стержень, сжатый продольной силой F. Положим, что по какой-то причине стержень получил малое искривление оси, вследствие чего в нем появился изгибающий момент M:

где y – прогиб стержня в произвольном сечении с координатой x.



Для определения критической силы можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением упругой линии:

где E – модуль Юнга; J – осевой момент инерции сечения стержня относительно оси z в данном случае; E·J – жесткость стержня при изгибе. Знаки левой и правой части согласованны в данной системе координат.

Подставив в это уравнение выражение для изгибающего момента, получим

Введя обозначение

перепишем формулу так:

Общий интеграл полученного однородного дифференциального уравнения представляется функцией:

Это решение содержит три неизвестные: постоянные интегрирования С1 и С2 и параметр k. Найдем эти величины из граничных условий – условий закрепления стержня по концам:

а) при x=0 прогиб в опоре (точка A) должен быть равен нулю y=0, тогда из уравнения получим, что С2=0, при этом формула приобретает вид

б) при x=l прогиб в другой опоре (точка B) должен быть также равен нулю y=0, тогда из уравнения получим, что . Согласно постановке задачи, коэффициент C1 заведомо не равен нулю (иначе равен нулю прогиб балки во всех точках, что противоречит постановке задачи). В этом случае получаем

Из свойств синусоиды следует, что

где n – произвольное целое число (n≠0), которое представляет собой число полуволн синусоиды, укладывающихся на длине изогнутой оси стержня.

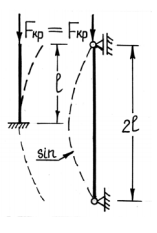
Решая совместно уравнения получим выражение для некоторых фиксированных значений сжимающей силы, при которых возможна криволинейная форма равновесия оси стержня

Как видим, минимальное значение критическая сила примет при n=1 (на длине стержня укладывается одна полуволна синусоиды) и J=Jmin (стержень искривляется относительно оси с наименьшим моментом инерции).

Это выражение обычно называют формулой Эйлера , а определяемую с ее помощью критическую силу – эйлеровой силой.

Консоль - это стержень, один конец которого свободен, а второй прочно зажат (заделан) в какую-то неподвижную опору. Рассмотрим случай для консоли:

Стержень длиной l заделан одним концом и сжат продольной силой. Из сравнения вида изогнутой оси балки для рассматриваемого и основного случаев можем сделать вывод, что ось стержня, заделанного одним концом, находится в тех же условиях, как и верхняя половина шарнирно опертого стержня длиной 2·l. Таким образом, критическая сила для стержня длиной l с одним защемленным концом может быть найдена так же как и для шарнирно опертой балки длиной 2·l, то есть



**5. Элементы теории задачи линейного программирования при производстве двух видов бетона в зависимости от расхода цемента, песка и щебня**

Предположим, что предприятие выпускает n различных видов изделий (в данном случае n=2 вида бетона). Для их производства требуется m различных видов ресурсов (в данном случае m=3 - цемент, песок, щебень). Эти ресурсы ограничены и составляют в планируемый период условных единиц. Известны также технологические коэффициенты , которые указывают, сколько единиц *i*-го ресурса требуется для производства изделия *j-*го вида. Пусть прибыль, получаемая предприятием при реализации единицы изделия *j-*го вида, равна . В планируемый период все показатели предполагаются постоянными

Требуется составить такой план выпуска продукции, при реализации которого прибыль предприятия была бы наибольшей.

Экономико-математическая модель задачи



Целевая функция представляет собой суммарную прибыль от реализации выпускаемой продукции всех видов. В данной модели задачи оптимизация возможна за счет выбора наиболее выгодных видов продукции. Ограничения означают, что для любого из ресурсов его суммарный расход на производство всех видов продукции не превосходит его запасы.

**6. Алгоритмы численного решения нелинейных и трансцендентных уравнений**

Численное решение нелинейных (алгебраических или трансцендентных) уравнений вида заключается в нахождении значений x, удовлетворяющих (с заданной точностью) данному уравнению и состоит из следующих основных этапов:

* отделение (изоляция, локализация) корней уравнения;
* уточнение с помощью некоторого вычислительного алгоритма конкретного выделенного корня с заданной точностью.

Целью первого этапа является нахождение отрезков из области определения функции , внутри которых содержится только один корень решаемого уравнения. Иногда ограничиваются рассмотрением лишь какой-нибудь части области определения, вызывающей по тем или иным соображениям интерес. Для реализации данного этапа используются графические или аналитические способы.

Графический способ отделения корней целесообразно использовать в том случае, когда имеется возможность построения графика функции .

При аналитическом способе отделения корней полезна следующая теорема: непрерывная строго монотонная функция имеет и притом единственный нуль на отрезке тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков. Достаточным признаком монотонности функции на отрезке является сохранение знака производной функции.

Так или иначе, при завершении первого этапа, должны быть определены промежутки, на каждом из которых содержится только один корень уравнения.

Для уточнения корня с требуемой точностью обычно применяется какой-либо итерационный метод, заключающийся в построении числовой последовательности (k = 0, 1, 2, …), сходящейся к искомому корню.

Обозначим наиболее известные методы:

* метод половинного деления;
* метод Ньютона (метод касательных);
* метод секущих;
* метод простой итерации.

**7. Алгоритмы решение нелинейных и трансцендентных уравнений методом половинного деления. Критерии точности и условия сходимости решения**

Метод половинного деления один из методов решения нелинейных уравнений и основан на последовательном сужении интервала, содержащего единственный корень уравнения F(x)=0 до того времени, пока не будет достигнута заданная точность ɛ. Пусть задан отрезок [а, b], содержащий один корень уравнения. Предварительно необходимо определить области локализации корней данного уравнения. Если на отрезке [а, b] содержится более одного корня, то метод не работает.

Опишем алгоритм метода. Разобьем отрезок [а, b] пополам. Определим новое приближение корня х в середине отрезка [а, b]:

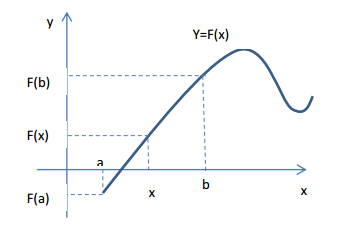
х=(а+b)/2.

Найдем значения функции в точках а и х: F(a) и F(x).

Проверим условие F(a)\*F(x) < 0. Если условие выполнено, то корень расположен на отрезке [а, х]. В этом случае необходимо точку b переместить в точку х (b=х). Если условие не выполнено, то корень расположен на отрезке [х, b]. В этом случае необходимо точку а переместить в точку х (а=х).

Перейдем к началу алгоритма и вновь поделим отрезок пополам. Алгоритм выполнять до тех пор, пока не будет выполнено условие |F(x)| < ɛ.

Отметим, что данный алгоритм сходится всегда, если на заданном отрезке [а, b], находится только один корень уравнения.



**8. Алгоритмы решения нелинейных и трансцендентных уравнений методом итерации. Критерии точности и условия сходимости решения**

С помощью эквивалентных преобразований приведем исходное уравнение f(x) к виду, удобному для применения метода простой итерации: x=φ(x). Выберем начальное приближение x0∈[a, b]. Следующие итерации находим по формуле: xk+1=φ(xk), т.е. x1=φ(x0), x2=φ(x1) и т.д. Итерационный процесс заканчивается, если |xk+1–xk|<ε.

Представить исходное уравнение в эквивалентном виде x=φ(x) можно бесконечным числом способов. Из всевозможных таких представлений выбирают тот, который дает сходящуюся к корню последовательность вычислений. Очевидно, что http://pers.narod.ru/study/methods/1.files/image026.gif.

Достаточное условие сходимости: пусть φ(x) имеет производную на отрезке [a,b], http://pers.narod.ru/study/methods/1.files/image027.gif и http://pers.narod.ru/study/methods/1.files/image028.gif для всех x из отрезка [a,b], тогда итерационный процесс сходится к корню уравнения т.е. http://pers.narod.ru/study/methods/1.files/image029.gif.

В качестве начального приближения обычно берут середину отрезка [a, b]: http://pers.narod.ru/study/methods/1.files/image040.gif.

На практике часто в качестве http://pers.narod.ru/study/methods/1.files/image041.gif берут функцию http://pers.narod.ru/study/methods/1.files/image042.gif, где с – некоторая постоянная. Постоянную c выбирают таким образом, чтобы http://pers.narod.ru/study/methods/1.files/image028.gif для всех x∈[a, b]. При таком выборе функции http://pers.narod.ru/study/methods/1.files/image041.gif метод простой итерации называют методом релаксации.

**9. Алгоритмы решения нелинейных и трансцендентных уравнений методом Ньютона. Критерии точности и условия сходимости решения**

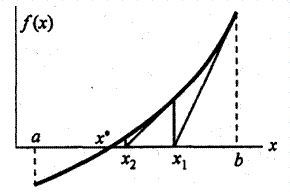
При нахождении корня уравнения методом Ньютона, итерационный процесс определяется формулой:



Для начала вычислений требуется задание начального приближения .

Условия сходимости метода определяются следующей теоремой: Пусть на отрезке [a,b] функция имеет первую и вторую производные постоянного знака и пусть . Тогда если точка выбрана на [a,b] так, что , то начатая с нее последовательность (k = 0, 1, 2, …), определяемая методом Ньютона, монотонно сходится к корню уравнения.

В качестве условия окончания итераций в практических вычислениях часто используется правило:



**10. Сравнительный анализ и применение в инженерных расчетах методов численного решения систем линейных алгебраических уравнений**

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

, (1)

где  − матрица ,  − искомый вектор,  − заданный вектор. Будем предполагать, что определитель матрицы отличен от нуля, т.е. решение системы существует.

Методы численного решения системы делятся на две группы: прямые методы («точные») и итерационные методы.

Прямыми методами называются методы, позволяющие получить решение системы за конечное число арифметических операций. К этим методам относятся метод Крамера, метод Гаусса, LU-метод и т.д.

Итерационные методы (методы последовательных приближений) состоят в том, что решение системы находится как предел последовательных приближений  при , где n номер итерации. При использовании методов итерации обычно задается некоторое малое число ε>0 и вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнена оценка . К этим методам относятся метод Зейделя, Якоби, метод верхних релаксаций и т.д.

Следует заметить, что реализация прямых методов на компьютере приводит к решению с погрешностью, т.к. все арифметические операции над переменными с плавающей точкой выполняются с округлением. В зависимости от свойств матрицы исходной системы эти погрешности могут достигать значительных величин.

**11. Алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Критерии точности и условия сходимости решения**

Запишем систему Ax=f, в развернутом виде



Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных из этой системы. Предположим, что . Последовательно умножая первое уравнение на  и складывая с i-м уравнение, исключим  из всех уравнений кроме первого. Получим систему





Аналогичным образом из полученной системы исключим . Последовательно, исключая все неизвестные, получим систему треугольного вида



Описанная процедура называется прямым ходом метода Гаусса. Заметим, что ее выполнение было возможно при условии, что все ,  не равны нулю.

Выполняя последовательные подстановки в последней системе, (начиная с последнего уравнения) можно получить все значения неизвестных.

 .

Эта процедура получила название обратный ход метода Гаусса.

Метод Гаусса может быть легко реализован на компьютере. При выполнении вычислений, как правило, не интересуют промежуточные значения матрицы А. Поэтому численная реализация метода сводится к преобразованию элементов массива размерности (m×(m+1)), где m+1 столбец содержит элементы правой части системы.

Один из основных недостатков метода Гаусса связан с тем, что при его реализации накапливается вычислительная погрешность. Для того, чтобы уменьшить рост вычислительной погрешности применяются различные модификации метода Гаусса.

Если система имеет решения, то метод Гаусса сходится всегда.

**12. Алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений методом простой итерации. Критерии точности и условия сходимости решения**

При большом числе неизвестных схема метода Гаусса, дающая точное решение, становится весьма сложной. В таких случаях более эффективным способом численного решения уравнений является метод итерации.

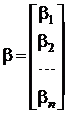
Пусть дано уравнение (1)

http://orloff.am.tpu.ru/matlab/Lab3/sistema.files/image067.gif.

Заменим его равносильным уравнением

http://orloff.am.tpu.ru/matlab/Lab3/sistema.files/image069.gif.                                              (2)

Здесь

http://orloff.am.tpu.ru/matlab/Lab3/sistema.files/image071.gif;        .

Вычислительная формула метода простых итераций:

                    (3)

Если последовательность http://orloff.am.tpu.ru/matlab/Lab3/sistema.files/image077.gif имеет предел http://orloff.am.tpu.ru/matlab/Lab3/sistema.files/image079.gif, то этот предел является решением системы (3).

Представим теорему сходимости метода: если http://orloff.am.tpu.ru/matlab/Lab3/sistema.files/image081.gif, то система уравнений (2) имеет единственное решение и итерационный процесс (3) сходится к решению независимо от начального приближения.

Критерий окончания итерационного процесса:

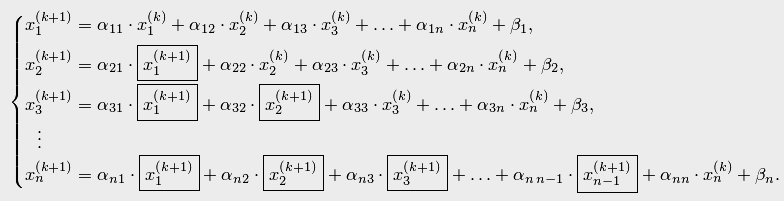


Здесь e - заданная точность вычислений. В качестве решения берется величина Xn.

**13. Алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений методом Зейделя. Критерии точности и условия сходимости решения**

Метод Зейделя является модификацией метода простых итераций и в некоторых случаях приводит к более быстрой сходимости.

Итерации по методу Зейделя отличаются от простых итераций тем, что при нахождении i-й компоненты (k+1)-го приближения сразу используются уже найденные компоненты (k+1)-го приближения с меньшими номерами 1,2,\ldots,i-1. При рассмотрении развернутой формы системы итерационный процесс записывается в виде



В каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, полученных из предыдущих уравнений.

Теорема о достаточном условии сходимости метода Зейделя. Если для системы x=\alpha x+\beta какая-либо норма матрицы \alpha меньше единицы, т.е. \|\alpha\|_s<1,~s\in\{1,2,3\}, то процесс последовательных приближений сходится к единственному решению исходной системы Ax=b при любом начальном приближении x^{(0)}.

Записывая указанную систему в матричной форме, получаем

x^{(k+1)}=L\cdot x^{(k+1)}+U\cdot x^{(k)}+\beta\,,

где L,\,U являются разложениями матрицы \alpha:

Преобразуем к виду x=\alpha x+\beta, получаем матричную форму итерационного процесса метода Зейделя:

x^{(k+1)}= (E-L)^{-1}\cdot U\cdot x^{(k)}+ (E-L)^{-1}\cdot\beta\,.

Тогда достаточное, а также необходимое и достаточное условия сходимости будут соответственно такими:



Критерий окончания итерационного процесса как и в методе простых итераций:



Здесь e - заданная точность вычислений. В качестве решения берется величина Xn.

**14. Алгоритмы вычисления собственных значений и векторов матриц и их применение в инженерных расчетах**

Пусть A — действительная числовая квадратная матрица размера (n\times n). Ненулевой вектор X= \bigl(x_1,\ldots,x_n\bigr)^T размера (n\times1), удовлетворяющий условию

 (1)

называется собственным вектором матрицы A. Число \lambda в равенстве (1) называется собственным значением. Говорят, что собственный вектор X соответствует (принадлежит) собственному значению \lambda.

Равенство (1) равносильно однородной относительно X системе:

 (2)

Система (2) имеет ненулевое решение для вектора X при условии |A-\lambda E|=0. Это равенство есть характеристическое уравнение:

|A-\lambda E|= P_n(\lambda)=0, (3)

где P_n(\lambda) — характеристический многочлен n-й степени. Корни \lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n характеристического уравнения (3) являются собственными (характеристическими) значениями матрицы A, а соответствующие каждому собственному значению \lambda_i,~ i=1,\ldots,n, ненулевые векторы X^i, удовлетворяющие системе

AX^i=\lambda_iX^i\quad \text{or}\quad (A-\lambda_i E)X^i=0,~~ i=1,2,\ldots,n, (4)

являются собственными векторами.

Представим основные алгоритмы нахождения собственных значений и векторов:

* метод итераций для нахождения собственных значений и векторов. Алгоритм метода:

1) Выбрать произвольное начальное (нулевое) приближение собственного вектора X^{1(0)} (второй индекс в скобках здесь и ниже указывает номер приближения, а первый индекс без скобок соответствует номеру собственного значения). Положить k=0.

2) Найти X^{1(1)}=AX^{1(0)},~ \lambda_1^{(1)}= \frac{x_i^{1(1)}}{x_i^{1(0)}}, где i — любой номер 1\leqslant i\leqslant n, и положить k=1.

3) Вычислить X^{1(k+1)}=A\cdot X^{1(k)}.

4) Найти \lambda_1^{(k+1)}= \frac{x_i^{1(k+1)}}{x_i^{1(k)}}, где x_i^{1(k+1)}, x_i^{1(k)} — соответствующие координаты векторов X^{1(k+1)} и X^{1(k)}. При этом может быть использована любая координата с номером i,~ 1\leqslant i\leqslant n.

5) Если \Delta= \bigl|\lambda_1^{(k+1)}- \lambda_1^{(k)}\bigr|\leqslant \varepsilon, процесс завершить и положить \lambda_1\cong \lambda_1^{k+1}. Если \Delta>\varepsilon, положить k=k+1 и перейти к пункту 3.

* метод вращений для нахождения собственных значений

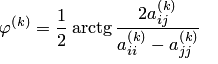
1) Положить k=0,~ A^{(0)}=A и задать \varepsilon>0.

2) Выделить в верхней треугольной наддиагональной части матрицы A^{(k)} максимальный по модулю элемент a_{ij}^{(k)},~ i<j.

Если |a_{ij}^{(k)}|\leqslant \varepsilon для всех i\ne j, процесс завершить. Собственные значения определяются по формуле \lambda_i(A^{(k)})=a_{ii}^{(k)},~ i=1,\ldots,n. Собственные векторы X^i находятся как i-e столбцы матрицы, получающейся в результате перемножения:



Если \bigl|a_{ij}^{(k)}\bigr|>\varepsilon, процесс продолжается.

3) Найти угол поворота по формуле .

4) Составить матрицу вращения H^{(k)}.

5) Вычислить очередное приближение A^{(k+1)}= \bigl(H^{(k)}\bigr)^T A^{(k)} H^{(k)}. Положить k=k+1 и перейти к пункту 2.

**15. Сравнительный анализ и применение в инженерных расчетах методов численного интегрирования функций**

В прикладных исследованиях часто возникает необходимость вычисления значения определённого интеграла



Как известно из курса математики, аналитически вычисление интеграла можно провести не во всех случаях. И даже в том случае, когда удаётся найти аналитический вид этого интеграла, процедура вычисления даёт приближённый результат, поэтому возникает задача приближенного значения этого интеграла.



Суть приближенного вычисления заключается в двух операциях:

1) в выборе конечного числа вместо n;

2) в выборе точки  в соответствующем отрезке.

В зависимости от выбора  получают различные формулы для вычисления интеграла:

* формулы левых и правых прямоугольников:

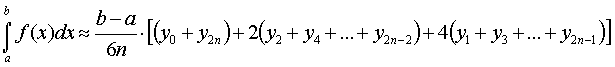
\int^b_a f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) (x_{i+1} - x_i).

\int^b_a f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_i - x_{i-1}).

* формула трапеции:

~I \approx h\left( \frac{f(x_{0})+f(x_{n})}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}f(x_{i})\right),

* формула Симпсона

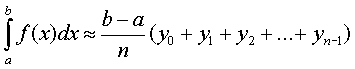


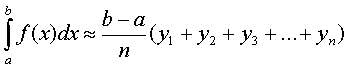
где h=(b-a)/n; b, a - концы рассматриваемого отрезка.

Среди указанных методов, наиболее точным является метод Симпсона.

**16. Сравнительный анализ текущей погрешности и скорости численного интегрирования функций методом прямоугольников и методом трапеций**

**1.** Представим формулу метода прямоугольников:

 - левых прямоугольников

 - правых прямоугольников

В этих условиях абсолютная величина погрешности Rn, которую мы допускаем, вычисляя интеграл image057.gif (391 bytes) по формуле прямоугольников может быть оценена по формуле:

|Rn| mor.gif (852 bytes) M(b-a)2/2n                                       (2)

При неограниченном возрастании n выражение M(b-a)2/2n, а следовательно, и абсолютная величина погрешности Rn будет стремиться к нулю, т.е. точность приближения будет тем больше, чем на большее число равных частей будет разделен сегмент [a, b]. Абсолютная погрешность результата будет заведомо меньше заданного числа e.gif (847 bytes)>0, если взять

n > M(b-a)2/2ε

Следовательно, для вычисления интеграла image058.gif (391 bytes) с указанной степенью точности достаточно сегмент [a, b] разбить на число частей, большее числа M(b-a)2/2ε.

Метод прямоугольников – это наиболее простой и вместе с тем наиболее грубый метод приближенного интегрирования. Заметно меньшую погрешность дает другой метод – метод трапеций.

**2.** Представим формулу метода трапеций:

image079.gif (1040 bytes)

Формулой трапеций часто пользуются для практических вычислений. Что касается оценки погрешности Rn, возникающей при замене левой части формулы правой, то доказывается, что абсолютная величина ее удовлетворяет неравенству:

image081.gif (545 bytes)

где М2 – максимум модуля второй производной подинтегральной функции на отрезке [a,b], т.е.

image083.gif (541 bytes).

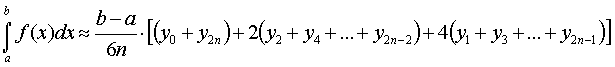
Следовательно, Rn убывает при besk.gif (915 bytes) по крайней мере так же быстро, как image085.gif (235 bytes).

Абсолютная погрешность Rn будет меньше наперед заданного числа e.gif (847 bytes) > 0, если взять image087.gif (522 bytes).

Cравнивая между собой оценки методов, заметим, что с увеличением n поправочный член формулы трапеций уменьшается пропорционально величине image101.gif (235 bytes), а для формул прямоугольников – пропорционально величине , т.е. метод трапеций сходится значительно быстрее методов прямоугольников, тогда как с точки зрения техники вычислений оба метода одинаковы.

**17. Сравнительный анализ текущей погрешности и скорости численного интегрирования функций методом Симпсона и методом трапеций**

**1.** Представим формулу метода Симпсона:



Если подинтегральная функция f(x) имеет на отрезке [a,b] непрерывную четвертую производную, то для поправочного члена формулы имеет место оценка:

image098.gif (642 bytes)

где М4- максимум модуля четвертой производной подинтегральной функции на отрезке [a,b].

**2.** Представим формулу метода трапеций:

image079.gif (1040 bytes)

Формулой трапеций часто пользуются для практических вычислений. Что касается оценки погрешности Rn, возникающей при замене левой части формулы правой, то доказывается, что абсолютная величина ее удовлетворяет неравенству:

image081.gif (545 bytes)

где М2 – максимум модуля второй производной подинтегральной функции на отрезке [a,b], т.е.

image083.gif (541 bytes).

Следовательно, Rn убывает при besk.gif (915 bytes) по крайней мере так же быстро, как image085.gif (235 bytes).

Абсолютная погрешность Rn будет меньше наперед заданного числа e.gif (847 bytes) > 0, если взять image087.gif (522 bytes).

Cравнивая между собой оценки методов, заметим, что с увеличением n поправочный член формулы трапеций уменьшается пропорционально величине image101.gif (235 bytes), а для формулы Симпсона – пропорционально величине image100.gif (237 bytes), т.е. метод Симпсона сходится значительно быстрее метода трапеций, тогда как с точки зрения техники вычислений оба метода одинаковы.

**18. Применение численного дифференцирования функций в инженерных расчетах**

При решении практических задач часто нужно найти производные функции y = f(x), заданной таблично. Возможно также, что в силу сложности аналитического выражения функции f(x) непосредственное дифференцирование ее затруднительно. В этих случаях прибегают к численному (приближенному) дифференцированию.

Для вывода формул приближенного дифференцирования заменяют данную функцию f(x) на интересующем отрезке [a, b] интерполирующей функцией P(x), чаще всего полиномом, а затем полагают, чтопри .

Если для интерполирующей функции P(x) известна погрешность , то погрешность производной P′(x) выражается формулой , т.е. погрешность производной интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции.

Следует отметить, что численное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование.

**19. Алгоритмы численного дифференцирования функций с разложением в ряд Тейлора**

По определению, первая производная гладкой функции в точке x вычисляется как:

При вычислении производной функции на компьютере мы заменяем бесконечно малое на малое, но конечное значение h:

где – ошибка вычисления производной, естественно зависящая от h. Формула называется разностной схемой для вычисления первой производной.

Для того, что бы определить , разложим функцию в ряд Тейлора в точке :

Откуда следует, что в первом порядке разложения:

Выполним разложение функции в ряд Тейлора в точках и , вычитая затем один результат из другого, что дает:

где погрешность вычисления первой производной:

Аналогично может быть получена формула для второй производной:

С погрешностью:

**20. Левостороннее и правостороннее приближение производной при численном дифференцировании функций**

Существуют такие функции http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image001.gif, аналитическое вычисление производных которых представляет собой сложную задачу и более выгодным является численное дифференцирование. Численное дифференцирование основано на следующих предпосылках:

Производная функции определяется выражением:

http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image002.gif

Заменяя приращение http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image003.gifна конечную величину http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image004.gif, называемую шагом дифференцирования, получаем выражение:

http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image005.gif

Если дифференцируемая функция задана уравнением, то для вычисления значения дифференциала необходимо получить значение функции http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image001.gif в точке http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image006.gif и в точке http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image007.gif. После чего можно вычислить значение производной функции http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image008.gif.

Если функция задана выборкой, т.е. набором значений функции в точках:

|  |  |
| --- | --- |
| f1 | x1 |
| f2 | x2 |
| f3 | x3 |
| f4 | x4 |
| http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image009.gif | http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image009.gif |

то выражение для численного дифференцирования (при условии, что x образуют возрастающую последовательность) можно переписать в виде:

http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image010.gif

Особенно такой подход актуален в том случае, когда набор данных имеет случайное распределение, для которого неизвестна подходящая функциональная зависимость.

Как видно из этих выражений, значение производной в точке http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image011.gif, оценивается по значению функции в этой точке и в следующей точке http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image012.gif. Такой способ можно условно назвать правосторонней разностью. Нетрудно записать выражение для левосторонней разности:

http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image013.gifили http://www.compmodel.ru/saved/111.files/image014.gif

С точки зрения точности оба эти подхода равнозначны.

**21. Применение метода конечных разностей при решении дифференциальных уравнений**

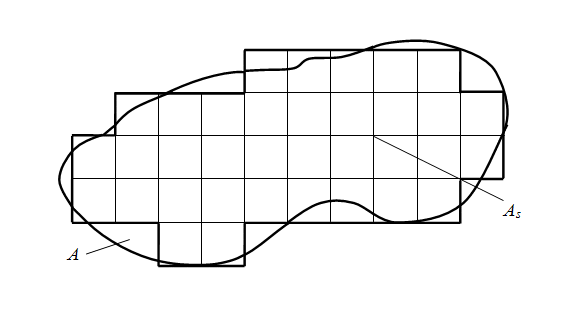
Метод конечных разностей — численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных разностными схемами. Является сеточным методом.

Основная идея метода конечных разностей (метода сеток) для приближенного численного решения краевой задачи для двумерного дифференциального уравнения в частных производных состоит в том, что

1) на плоскости в области А, в которой ищется решение, строится сеточная область Аs, состоящая из одинаковых ячеек размером s (s – шаг сетки) и являющаяся приближением данной области А;

2) заданное дифференциальное уравнение в частных производных заменяется в узлах сетки Аs соответствующим конечно-разностным уравнением;

3) с учетом граничных условий устанавливаются значения искомого решения в граничных узлах области Аs.



Решая полученную систему конечно-разностных алгебраических уравнений, получим значения искомой функции в узлах сетки *Аs* , т.е. приближенное численное решение краевой задачи. Выбор сеточной области *Аs* зависит от конкретной задачи, но всегда надо стремиться к тому, чтобы контур сеточной области *Аs* наилучшим образом аппроксимировал контур области *А*.

Главной проблемой метода является построение правильной разностной схемы, которая будет сходится к решению. Построение схемы выполняется исходя из свойств исходного дифференциального оператора.

**22. Алгоритмы численного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера с начальными условиями (Задача Коши)**

Простейшим численным методом решения задачи Коши является метод Эйлера, называемый иногда методом ломаных Эйлера.

Угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image068.gif есть

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image070.gif.

Найдём ординату http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image072.gif касательной, соответствующей абсциссе  http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image074.gif. Так как уравнение касательной к кривой в точке http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image076.gif имеет вид http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image078.gif, то

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image080.gif.

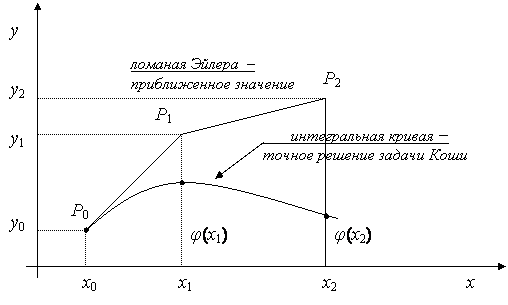
Угловой коэффициент в точке http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image082.gif также находится из данного дифференциального уравнения http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image084.gif. На следующем шаге получаем новую точку http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image086.gif, причём

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image088.gifи   http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image090.gif.

Продолжая вычисления в соответствии с намеченной схемой, получим формулы Эйлера для http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image092.gif приближённых значений решения задачи Коши с начальными данными http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image012.gif на сетке отрезка http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image029.gif с шагом http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image033.gif:

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image095.gif,     http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image097.gif

Графической иллюстрацией приближённого решения является ломаная, соединяющая последовательно точки http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image100.gif, которую называют ломаной Эйлера.



Погрешность метода Эйлера можно оценить неравенством

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image118.gif

или представить в виде

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image120.gif,

где                                   http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image122.gif.

Это означает, что метод Эйлера имеет первый порядок точности. В частности, при уменьшении шага http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8.files/image033.gif в 10 раз погрешность уменьшится примерно в 10 раз.

**23. Применение метода Эйлера для определения функции угла отклонения математического маятника от положения равновесия в режиме свободных колебаний**

Математический маятник (шарик на невесомой нити), выведенный из равновесия, может колебаться под действием возвращающей силы, величина которой, можно считать, пропорциональна отклонению от положения равновесия:

 (1)

Здесь х – угол отклонения маятника от положения устойчивого равновесия, L – длина маятника, g – ускорение свободного падения.

Таким образом, колебания математического маятника без учета силы трения и при отсутствии вынуждающей силы описываются уравнением:

 (2)

Здесь ω0 – собственная частота колебаний. Для решения уравнения второго порядка

 (3)

Обозначим скорость маятника p=dx/dt и сведем ОДУ второго порядка к системе:

 (4)

которую можно решать с разными начальными условиями.

Запишем схему Эйлера, которая позволяет решать систему ОДУ численно:



**24. Решения задач линейного программирования по повышению рентабельности и доходности строительного производства**

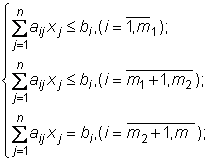
Линейное программирование — математическая дисциплина, посвящённая теории и методам решения экстремальных задач на множествах n-мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств.

В общем виде задача линейного программирования ставится следующим образом.

Максимизировать (минимизировать) функцию

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/MAT_LOG_TEOR_ALG/METOD/USH_PM/frame/3.files/image002.gif                                          (1)

при ограничениях



где xj, http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/MAT_LOG_TEOR_ALG/METOD/USH_PM/frame/3.files/image008.gif –управляющие переменные или решения задачи; bj, aij, http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/MAT_LOG_TEOR_ALG/METOD/USH_PM/frame/3.files/image010.gifhttp://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/MAT_LOG_TEOR_ALG/METOD/USH_PM/frame/3.files/image008.gif – параметры, f – целевая функция или критерий эффективности задачи.

Функция (1) – линейная, ограничения – линейные. Задача содержит n переменных и m ограничений.

Решить задачу линейного программирования  –  это значит найти значения управляющих переменных xj, http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/MAT_LOG_TEOR_ALG/METOD/USH_PM/frame/3.files/image008.gif удовлетворяющих ограничениям, при которых целевая функция (1) принимает минимальное или максимальное значение.

В зависимости от вида целевой функции (1) и ограничений   
можно выделить несколько типов задач линейного программирования или линейных моделей: общая линейная задача, транспортная задача, задача о назначениях.

С помощью линейного программирования, можно решать следующие задачи:

* оптимальное планирование производства;
* формирование минимальной потребительской продовольственной корзины;
* расчет оптимальной загрузки оборудования;
* Оптимизация раскроя материала.